



THE
ABEL
PRIZE
2016

Норвежская академия наук решила присудить Абелевскую премию за 2016 сэру Эндрю Дж. Уайлсу, Оксфордский университет

сэру Эндрю Дж. Уайлсу

Оксфордский университет

“за его потрясающее доказательство Великой теоремы Ферма путем применения теории модулярности для полустабильных эллиптических кривых, открывающее новую эру в теории чисел”.

Теория чисел, старый и красивый раздел математики, касается изучения арифметических свойств чисел. В своём современном виде она тесно связана с комплексным анализом, алгебраической геометрией и теорией представлений. Многочисленные теоретические результаты играют важную роль в нашей повседневной жизни через применение алгоритмов кодирования в сферах коммуникации, финансовых операций и цифровой безопасности.

Великая теорема Ферма, впервые сформулированная Пьером де Ферма в 17-ом веке, утверждает, что уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет решений в целых положительных числах при $n > 2$. Ферма доказал это утверждение при $n=4$, Леонард Эйлер нашел решение для $n=3$, а Софи Жермен получила первый общий результат, применимый к бесконечному множеству простых экспонент. Исследования Куммера по этому вопросу привели к появлению нескольких основных понятий в теории алгебраических чисел, таких как идеальные числа и тонкости однозначных разложений. Полное доказательство, найденное Эндрю Уайлсом, основано на трех последующих концепциях в теории чисел, а именно на эллиптических кривых, модулярных формах и представлениях Галуа.

Эллиптические кривые определяются кубическими уравнениями с двумя переменными. Они служат естественными областями определения эллиптических функций, введенными Абелем. Модулярные формы являются весьма симметричными аналитическими функциями, определенными в верхней половине комплексной плоскости и естественно связанными с геометрическими объектами, известными как модулярные кривые. Эллиптическая кривая называется модулярной, если она может быть параметризована отображением с одной из этих модулярных кривых. Гипотеза модулярности, предложенная Горо Симурой, Ютакой Таниямой и Андрэ Вейлем в 50-х и 60-х годах, утверждает, что каждая эллиптическая кривая, определенная над полем рациональных чисел, является модулярной.

В 1984 году Герхард Фрей связал полустабильную эллиптическую кривую с любым гипотетическим контрпримером к теореме Ферма, и высказал предположение, что это эллиптическая кривая не может быть модулярной. В 1986 году немодулярность Фрея была доказана Кеннетом Рибем с помощью эпсилон-гипотезы Жан-Пьера Серра. Следовательно, доказательство гипотезы модулярности Симуры-



Таниямы-Вейля для полустабильных эллиптических кривых также является доказательством теоремы Ферма. Тем не менее, в то время гипотеза модулярности считалась абсолютно неприступной. Именно поэтому потрясающим прорывом стала статья Эндрю Уайлса, опубликованная в 1995 году, где он предложил метод подъема модулярности и доказал полустабильный случай гипотезы модулярности.

Метод подъема модулярности Уайлса связан с симметриями Галуа точек конечного порядка в абелевой группе эллиптической кривой. Основываясь на теории деформации Барри Мазура для таких представлений Галуа, Уайлс определил численный критерий, который гарантирует, что модулярность для точек порядка p может быть поднята до модулярности для точек порядка любой степени p , где p - нечетное простое число. Этого достаточно для доказательства того, что эллиптическая кривая является модулярной. Численный критерий был доказан в полустабильном случае в другой важной работе, написанной совместно с Ричардом Тейлором. Теоремы Роберта Ленглендса

и Джеролда Таннелла показывают, что во многих случаях представление Галуа, заданное точками третьего порядка, является модулярным. Благодаря хитроумному переходу от одного простого числа к другому, Уайлс показал, что и в остальных случаях представление Галуа, заданное точками пятого порядка, является модулярным. Это позволило ему завершить свое доказательство теории модулярности и, как следствие, Великой теоремы Ферма.

Новаторские идеи Уайлса имели решающее значение для многих последующих достижений, включая доказательство общего случая теоремы модулярности, осуществленное Кристофом Брейлем, Брайаном Конрадом, Фредом Даймондом и Ричардом Тейлором в 2001 году. Совсем недавно, в 2015 году, Нуну Фрейтас, Бао В. Ле Хунг и Самир Сиксек доказали аналогичное утверждение о модулярности для реальных квадратичных числовых полей. Немногие результаты имеют такую богатую математическую историю и такое драматическое доказательство, как Великая теорема Ферма.

