XXVII.

DÉMONSTRATION D'UNE PROPRIÉTÉ GÉNÉRALE D'UNE CERTAINE CLASSE DE FONCTIONS TRANSCENDANTES.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 4, Berlin 1829.

Théorème. Soit y une fonction de x qui satisfait à une équation quelconque irréductible de la forme

$$(1) \qquad 0 = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + \cdots + p_{n-1} y^{n-1} + y^n,$$

où $p_0, p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$ sont des fonctions entières de la variable x. Soit de même

$$(2) \qquad 0 = q_0 + q_1 y + q_2 y^2 + \cdots + q_{n-1} y^{n-1},$$

une équation semblable, $q_0, q_1, q_2, \ldots q_{n-1}$ étant également des fonctions entières de x, et supposons variables les coefficiens des diverses puissances de x dans ces fonctions. Nous désignerons ces coefficiens par $a, a', a'' \ldots$ En vertu des deux équations (1) et (2) x sera une fonction de $a, a', a'', \ldots$ et on en déterminera les valeurs en éliminant la quantité y. Désignons par

$$(3) \qquad \varrho = 0$$

le résultat de l'élimination, de sorte que ϱ ne contiendra que les variables $x, a, a', a'', \ldots$ Soit μ le degré de cette équation par rapport à x, et désignons par

$$(4) \qquad x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu$$

ses μ racines, qui seront autant de fonctions de a, a', a'', ... Cela posé, si l'on fait

$$(5) \qquad \psi x = \int f(x, y)\, dx,$$

où $f(x, y)$ désigne une fonction *rationnelle* quelconque de x et de y, je dis que la fonction transcendante ψx jouira de la propriété générale exprimée par l'équation suivante:

$$(6) \qquad \psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_\mu = u + k_1 \log v_1 + k_2 \log v_2 + \cdots + k_n \log v_n,$$

u, v_1, v_2, ... v_n étant des fonctions rationnelles de a, a', a'', ..., et k_1, k_2, ... k_n des constantes.

Démonstration. Pour établir ce théorème il suffit d'exprimer la différentielle du premier membre de l'équation (6) en fonction de a, a', a'', ...; car il se réduira par là à une différentielle rationnelle, comme on va voir. D'abord les deux équations (1) et (2) donneront y en fonction rationnelle de x, a, a', a'', ... De même l'équation (3) $\varrho = 0$ donnera pour dx une expression de la forme

$$dx = \alpha . da + \alpha' . da' + \alpha'' . da'' + \cdots,$$

où α, α', α'', ... sont des fonctions rationnelles de x, a, a', a'', ... De là il suit qu'on pourra mettre la différentielle $f(x, y)\, dx$ sous la forme

$$f(x, y)\, dx = \varphi x . da + \varphi_1 x . da' + \varphi_2 x . da'' + \cdots,$$

où φx, $\varphi_1 x$, ... sont des fonctions rationnelles de x, a, a', a'', ... En intégrant, il viendra

$$\psi x = \int (\varphi x . da + \varphi_1 x . da' + \cdots)$$

et de là on tire, en remarquant que cette équation aura lieu en mettant pour x les μ valeurs de cette quantité,

$$(7) \qquad \psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_\mu$$
$$= \int [(\varphi x_1 + \varphi x_2 + \cdots + \varphi x_\mu)\, da + (\varphi_1 x_1 + \varphi_1 x_2 + \cdots + \varphi_1 x_\mu)\, da' + \cdots].$$

Dans cette équation les coefficiens des différentielles da, da', ... sont des fonctions rationnelles de a, a', a'', ... et de x_1, x_2, ... x_μ, mais en outre ils sont symétriques par rapport à x_1, x_2, ... x_μ; donc, en vertu d'un théorème connu, on pourra exprimer ces fonctions rationnellement par a, a', a'', ... et par les coefficiens de l'équation $\varrho = 0$; mais ceux-ci sont euxmêmes des fonctions rationnelles des variables a, a', a'', ..., donc enfin les coefficiens de da, da', da'', ... de l'équation (7) le seront également. Donc, en intégrant, on aura une équation de la forme (6).

Je me réserve de développer dans une autre occasion les nombreuses applications de ce théorème, qui jetteront du jour sur la nature des fonctions transcendantes dont il s'agit.

Christiania le 6 janvier 1829.