XXVI.

THÉORÈMES SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 4, Berlin 1829.

La formule donnée par M. *Jacobi* dans le tome III p. 86 de ce journal peut être établie facilement à l'aide d'un théorème que nous allons démontrer dans ce qui suit.

En faisant $\varphi\theta = x$, on aura, en vertu de ce qu'on a vu dans le § III du mémoire n° 12 tome II de ce journal*)

$$\varphi(2n+1)\theta = R, \tag{1}$$

où R est une fonction rationnelle de x, le numérateur étant du degré $(2n+1)^2$ et le dénominateur du degré $(2n+1)^2-1$. L'équation (1) est donc du degré $(2n+1)^2$ et ses racines peuvent être exprimées par la formule:

$$x = \varphi\left(\theta + \frac{2m\omega + 2\mu\varpi i}{2n+1}\right), \tag{2}$$

en donnant à m et μ toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à $2n$.

Soit pour abréger

$$\frac{2\omega}{2n+1} = \alpha, \quad \frac{2\varpi i}{2n+1} = \beta, \tag{3}$$

l'expression des racines sera

$$x = \varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta). \tag{4}$$

*) Mémoire XVI de cette édition.

Cela posé, nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème I. Soit $\psi\theta$ une fonction *entière* quelconque des quantités $\varphi(\theta+m\alpha+\mu\beta)$ qui reste la même en changeant θ en $\theta+\alpha$ et en $\theta+\beta$. Soit ν le plus grand exposant de la quantité $\varphi\theta$ dans la fonction $\psi\theta$, on aura toujours

$$\psi\theta=p+q.f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta, \tag{5}$$

p et q étant deux fonctions *entières* de $\varphi(2n+1)\theta$, la première du degré ν et la seconde du degré $\nu-2$.

Démonstration. En vertu de la formule (10) tome II p. 105*) on a

$$\varphi(\theta+m\alpha+\mu\beta)=\frac{\varphi\theta.f(m\alpha+\mu\beta).F(m\alpha+\mu\beta)+\varphi(m\alpha+\mu\beta).f\theta.F\theta}{1+e^2c^2.\varphi^2(m\alpha+\mu\beta).\varphi^2\theta},$$

d'où il suit qu'on pourra exprimer $\psi\theta$ rationnellement en $\varphi\theta$ et $f\theta.F\theta$. Or le carré de $f\theta.F\theta$ est rationnel en $\varphi\theta$, car

$$(f\theta.F\theta)^2=(1-c^2\varphi^2\theta)(1+e^2\varphi^2\theta),$$

donc on pourra faire en sorte que l'expression de $\psi\theta$ ne contienne la quantité $f\theta.F\theta$ qu'à la première puissance. On pourra donc faire

$$\psi\theta=\psi_1(\varphi\theta)+\psi_2(\varphi\theta).f\theta.F\theta, \tag{7}$$

où $\psi_1(\varphi\theta)$ et $\psi_2(\varphi\theta)$ sont des fonctions rationnelles de $\varphi\theta$.

Si l'on met $\omega-\theta$ à la place de θ, on aura, en remarquant que $\varphi(\omega-\theta)=\varphi\theta$, $f(\omega-\theta)=-f\theta$, $F(\omega-\theta)=F\theta$:

$$\psi(\omega-\theta)=\psi_1(\varphi\theta)-\psi_2(\varphi\theta).f\theta.F\theta. \tag{8}$$

Des équations (7) et (8) on tire

$$\psi_1(\varphi\theta)=\tfrac{1}{2}.[\psi\theta+\psi(\omega-\theta)], \tag{9}$$

$$\psi_2(\varphi\theta).f\theta.F\theta=\tfrac{1}{2}.[\psi\theta-\psi(\omega-\theta)]. \tag{10}$$

Considérons d'abord la fonction $\psi_1(\varphi\theta)$. En y mettant $\theta+\alpha$ au lieu de θ, il viendra

$$\psi_1[\varphi(\theta+\alpha)]=\tfrac{1}{2}.[\psi(\theta+\alpha)+\psi(\omega-\alpha-\theta)];$$

or on a $\psi(\theta+\alpha)=\psi\theta$, et par conséquent aussi, en mettant $\omega-\alpha-\theta$ au lieu de θ,

*) P. 268 de cette édition.

$$\psi(\omega - \theta) = \psi(\omega - \alpha - \theta);$$

donc

$$\psi_1[\varphi(\theta + \alpha)] = \tfrac{1}{2}[\psi\theta + \psi(\omega - \theta)],$$

c'est-à-dire

$$\psi_1[\varphi(\theta + \alpha)] = \psi_1(\varphi\theta).$$

On aura de la même manière

$$\psi_1[\varphi(\theta + \beta)] = \psi_1(\varphi\theta).$$

La première de ces équations donne, en mettant successivement $\theta + \alpha$, $\theta + 2\alpha$, . . . au lieu de θ,

(11) $$\psi_1[\varphi(\theta + m\alpha)] = \psi_1(\varphi\theta),$$

où m est un nombre entier quelconque. De même la seconde équation donne

$$\psi_1[\varphi(\theta + \mu\beta)] = \psi_1(\varphi\theta),$$

d'où, en mettant $\theta + m\alpha$ au lieu de θ, et en ayant égard à l'équation (11) on tire

(12) $$\psi_1[\varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta)] = \psi_1(\varphi\theta).$$

Donc la fonction $\psi_1(\varphi\theta)$ reste la même, en y substituant au lieu de $\varphi\theta$ une autre racine quelconque de l'équation (1). En attribuant à m et μ toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à $2n$ et en ajoutant, la formule (12) donne

(13) $$\psi_1(\varphi\theta) = \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \psi_1[\varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta)].$$

Le second membre de cette équation est une fonction *rationnelle* et *symétrique* des racines de l'équation (1), donc on pourra l'exprimer rationnellement par les coefficiens de cette équation, c'est-à-dire par $\varphi(2n+1)\theta$. Soit donc

$$\psi_1(\varphi\theta) = p,$$

la quantité p sera une fonction rationnelle de $\varphi(2n+1)\theta$. Or je dis que p sera toujours entier. En effet soit $\varphi(2n+1)\theta = y$ et $p = \frac{p'}{q'}$, où p' et q' sont des fonctions entières de y sans diviseur commun. Soit $y = \varphi(2n+1)\delta$ une racine de l'équation $q' = 0$: la quantité $p = \frac{1}{2}[\psi\theta + \psi(\omega - \theta)]$ sera infinie en faisant $\theta = \delta$, donc on aura $\psi\delta + \psi(\omega - \delta) = \frac{1}{0}$; maintenant il est évident par la forme de la fonction $\psi\theta$, que cette équation ne peut subsister à moins qu'une quantité de la forme

$$\varphi(\delta + m\alpha + \mu\beta) \quad \text{ou} \quad \varphi(\omega - \delta + m\alpha + \mu\beta)$$

n'ait une valeur infinie. Soit donc $\varphi(\delta+m\alpha+\mu\beta)=\frac{1}{0}$, on aura en vertu de l'équation (30) tome II p. 113*)

$$\delta=(m'+\tfrac{1}{2})\omega+(n'+\tfrac{1}{2})\varpi i-m\alpha-\mu\beta,$$

où m' et n' sont des nombres entiers; or cette valeur de δ donne

$$\varphi(2n+1)\delta=\varphi\left[\left[(2n+1)m'+n-2m\right]\omega+\left[(2n+1)n'+n-2\mu\right]\varpi i+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right],$$

c'est-à-dire (26 p. 111*):

$$\varphi(2n+1)\delta=\tfrac{1}{0}.$$

Mais cela est impossible, car une racine quelconque de l'équation $q'=0$ doit être finie. On trouvera également que $\varphi(\omega-\delta+m\alpha+\mu\beta)=\frac{1}{0}$ donne $\varphi(2n+1)\delta=\frac{1}{0}$. La quantité p est donc une fonction entière de $\varphi(2n+1)\theta$.

Considérons maintenant l'équation (10). En divisant les deux membres par $f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta$, on aura

$$\frac{\psi_2(\varphi\theta).f\theta.F\theta}{f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\psi\theta-\psi(\omega-\theta)}{f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta}.$$

En vertu de ce qu'on a vu (45) tome II p. 117*), on aura $f(2n+1)\theta=f\theta.u$, $F(2n+1)\theta=F\theta.v$, u et v étant des fonctions rationnelles de $\varphi\theta$; donc le second membre de l'équation précédente sera une fonction rationnelle de $\varphi\theta$. En la désignant par $\chi(\varphi\theta)$, on aura

$$\chi(\varphi\theta)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\psi\theta-\psi(\omega-\theta)}{f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta}.$$

En mettant $\theta+\alpha$ au lieu de θ, il viendra

$$\psi(\theta+\alpha)=\psi\theta,\quad \psi[\omega-(\theta+\alpha)]=\psi(\omega-\theta),$$
$$f(2n+1)(\theta+\alpha)=f[(2n+1)\theta+2m\omega+2\mu\varpi i]=f(2n+1)\theta,$$
$$F(2n+1)(\theta+\alpha)=F[(2n+1)\theta+2m\omega+2\mu\varpi i]=F(2n+1)\theta,$$

donc on aura

$$\chi[\varphi(\theta+\alpha)]=\chi(\varphi\theta).$$

De la même manière on trouvera

$$\chi[\varphi(\theta+\beta)]=\chi(\varphi\theta).$$

On en déduit, comme plus haut pour la fonction $\psi_1(\varphi\theta)$, que $\chi(\varphi\theta)$ peut être exprimé par une fonction entière de $\varphi(2n+1)\theta$. Soit donc

*) Les formules citées se trouvent p. 275—281 de cette édition.

$$\chi(\varphi\theta) = q,$$

on aura

$$\psi_2(\varphi\theta) . f\theta . F\theta = q . f(2n+1)\theta . F(2n+1)\theta,$$

et enfin

$$\psi\theta = p + q . f(2n+1)\theta . F(2n+1)\theta, \tag{14}$$

où p et q sont des fonctions entières de $\varphi(2n+1)\theta$.

Pour trouver les degrés de ces fonctions, soit $(\varphi\theta)^\nu . \chi\theta$ le terme de $\psi\theta$, dans lequel $\varphi\theta$ est élevé à la plus haute puissance, on aura, en supposant $\varphi\theta$ infini,

$$\psi\theta = A . (\varphi\theta)^\nu,$$

A étant une constante. De même on aura

$$\psi(\omega - \theta) = A' . (\varphi\theta)^\nu,$$

et par suite:

$$p = \tfrac{1}{2}(A + A') . (\varphi\theta)^\nu;$$

mais pour $\varphi\theta$ infini, on a $\varphi(2n+1)\theta = B . \varphi\theta$, B étant une constante. Il suit de là que p sera du degré ν par rapport à $\varphi(2n+1)\theta$. On démontrera de la même manière que la fonction q sera du degré $\nu - 2$, tout au plus.

Notre théorème est donc démontré.

Dans le cas où la quantité $\varphi\theta$ ne monte qu'à la première puissance dans $\psi\theta$, on a $\nu = 1$; par conséquent q sera du degré -1, c'est-à-dire $q = 0$. Donc on a dans ce cas

$$\psi\theta = A + B . \varphi(2n+1)\theta, \tag{15}$$

où A et B sont des quantités constantes, qu'on déterminera facilement en faisant $\theta = 0$ et $\varphi\theta = \frac{1}{0}$.

Soit par exemple $\pi\theta$ le produit d'un nombre quelconque des racines de l'équation (1), et faisons

$$\psi\theta = \sum_{0}^{2n}{}_m \sum_{0}^{2n}{}_\mu \pi(\theta + m\alpha + \mu\beta),$$

il est clair qu'on aura $\psi(\theta) = \psi(\theta + \alpha) = \psi(\theta + \beta)$, en remarquant que

$$\pi[\theta + (2n+1)\alpha + \mu\beta] = \pi(\theta + \mu\beta)$$

et

$$\pi[\theta + (2n+1)\beta + m\alpha] = \pi(\theta + m\alpha).$$

Donc

$$(16)\qquad \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \pi(\theta + m\alpha + \mu\beta) = A + B.\varphi(2n+1)\theta.$$

Il faut remarquer que l'une des quantités A et B est toujours égale à zéro. On a $A = 0$ si le nombre des facteurs de $\pi\theta$ est un nombre impair, et $B = 0$ si ce nombre est pair. Dans ce dernier cas la quantité $\psi\theta$ est indépendante de la valeur de θ; par conséquent, en faisant $\theta = 0$, on a

$$(17)\qquad \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \pi(\theta + m\alpha + \mu\beta) = \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \pi(m\alpha + \mu\beta).$$

Si l'on fait par exemple

$$\pi\theta = \varphi\theta.\varphi(\theta + k\alpha + k'\beta),$$

on a

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta).\varphi[\theta + (m+k)\alpha + (\mu + k')\beta] \\ &= \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \varphi(m\alpha + \mu\beta).\varphi[(m+k)\alpha + (\mu + k')\beta], \end{aligned}\right.$$

où k et k' sont des nombres entiers quelconques, moindres que $2n+1$. Cependant on ne peut pas supposer à la fois $k = 0$, $k' = 0$. Car alors $\pi\theta = (\varphi\theta)^2$ et par suite $\nu = 2$, tandis qu'on doit avoir

$$\nu = 1.$$

De la même manière que nous avons démontré le théorème précédent on pourra encore établir les deux suivans:

Théorème II. Soit $\psi\theta$ une fonction quelconque entière des quantités de la forme $f(\theta + m\alpha + \mu\beta)$, telle que

$$\psi\theta = \psi(\theta + \alpha) = \psi(\theta + \beta),$$

on aura

$$\psi\theta = p + q.\varphi(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta,$$

où p et q sont des fonctions entières de $f(2n+1)\theta$, la première du degré ν et la seconde du degré $\nu - 2$, tout au plus, en désignant par ν le plus grand exposant de $f\theta$ dans $\psi\theta$.

Théorème III. Soit $\psi\theta$ une fonction quelconque entière des quantités de la forme $F(\theta + m\alpha + \mu\beta)$, telle que

$$\psi(\theta) = \psi(\theta + \alpha) = \psi(\theta + \beta),$$

on aura

$$\psi\theta = p + q.\varphi(2n+1)\theta.f(2n+1)\theta,$$

où p et q sont des fonctions entières de $F(2n+1)\theta$, la première du degré ν et la seconde du degré $\nu-2$, tout au plus, en désignant par ν le plus grand exposant de $F\theta$ dans $\psi\theta$.

En vertu du premier théorème on voit sans difficulté que la valeur de $\varphi\left(\frac{\theta}{2n+1}\right)$, exprimée en fonction de $\varphi\theta$, sera

$$\varphi\left(\frac{\theta}{2n+1}\right)=\frac{1}{2n+1}\cdot\sum_0^{4n^2+4n}{}_m \sqrt[2n+1]{p_m+q_m\cdot f\theta\cdot F\theta},$$

où p_m et q_m sont deux fonctions entières de $\varphi\theta$, la première impaire et du degré $2n+1$, la seconde paire et du degré $2n-2$. D'ailleurs ces fonctions sont déterminées par l'équation

$$p_m^2-q_m^2(f\theta)^2\cdot(F\theta)^2=(\varphi^2\theta-a_m^2)^{2n+1},$$

où a_m est une constante.

Christiania le 27 août 1828.