

XVIII.

NOTE SUR UN MÉMOIRE DE M. L. OLIVIER, AYANT POUR TITRE "REMARQUES SUR LES SÉRIES INFINIES ET LEUR CONVERGENCE."

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 3, Berlin 1828.

On trouve p. 34 de ce mémoire le théorème suivant pour reconnaître si une série est convergente ou divergente :

"Si l'on trouve que dans une série infinie le produit du $n^{\text{ième}}$ terme, ou du $n^{\text{ième}}$ des groupes de termes qui conservent le même signe, par n , est zéro pour $n = \infty$, on peut regarder cette seule circonstance comme une marque, que la série est convergente; et réciproquement, la série ne peut pas être convergente si le produit $n \cdot a_n$ n'est pas nul pour $n = \infty$."

La dernière partie de ce théorème est très juste, mais la première ne semble pas l'être. Par exemple la série

$$\frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \frac{1}{4 \log 4} + \dots + \frac{1}{n \log n} + \dots$$

est divergente, quoique $na_n = \frac{1}{\log n}$ soit zéro pour $n = \infty$. En effet les logarithmes hyperboliques, dont il est question, sont toujours moindres que leurs nombres moins 1, c'est-à-dire, qu'on a toujours $\log(1+x) < x$. Si $x > 1$ cela est évident. Si $x < 1$ on a

$$\log(1+x) = x - x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x\right) - x^4\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}x\right) - \dots,$$

donc aussi dans ce dernier cas $\log(1+x) < x$, puisque $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x$, $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}x$... sont tous positifs. En faisant $x = \frac{1}{n}$, cela donne

$$\log \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n} \quad \text{ou bien} \quad \log \frac{1+n}{n} < \frac{1}{n},$$

ou

$$\log (1+n) < \frac{1}{n} + \log n = \left(1 + \frac{1}{n \log n} \right) \log n;$$

donc

$$\log \log (1+n) < \log \log n + \log \left(1 + \frac{1}{n \log n} \right).$$

Mais puisque $\log (1+x) < x$, on a $\log \left(1 + \frac{1}{n \log n} \right) < \frac{1}{n \log n}$, donc, en vertu de l'expression précédente,

$$\log \log (1+n) < \log \log n + \frac{1}{n \log n}.$$

En faisant successivement $n=2, 3, 4, \dots$, on trouve

$$\log \log 3 < \log \log 2 + \frac{1}{2 \log 2},$$

$$\log \log 4 < \log \log 3 + \frac{1}{3 \log 3},$$

$$\log \log 5 < \log \log 4 + \frac{1}{4 \log 4},$$

.....

$$\log \log (1+n) < \log \log n + \frac{1}{n \log n},$$

donc, en prenant la somme,

$$\log \log (1+n) < \log \log 2 + \frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \frac{1}{4 \log 4} + \dots + \frac{1}{n \log n}.$$

Mais $\log \log (1+n) = \infty$ pour $n = \infty$, donc la somme de la série proposée $\frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \frac{1}{4 \log 4} + \dots + \frac{1}{n \log n} + \dots$ est infiniment grande, et par conséquent cette série est divergente. Le théorème énoncé dans l'endroit cité est donc en défaut dans ce cas.

En général on peut démontrer qu'il est impossible de trouver une fonction φn telle qu'une série quelconque $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$, dont nous supposons tous les termes positifs, soit convergente si $\varphi n \cdot a_n$ est zéro pour $n = \infty$, et divergente dans le cas contraire. C'est ce qu'on peut faire voir à l'aide du théorème suivant:

Si la série $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ est divergente, la suivante

$$\frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0 + a_1} + \frac{a_3}{a_0 + a_1 + a_2} + \dots + \frac{a_n}{a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}} + \dots$$

le sera aussi.

En effet, en remarquant que les quantités a_0, a_1, a_2, \dots sont positives, on a en vertu du théorème $\log(1+x) < x$, démontré ci-dessus,

$$\log(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n) - \log(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}),$$

c'est-à-dire

$$\log\left(1 + \frac{a_n}{a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}\right) < \frac{a_n}{a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}},$$

donc, en faisant successivement $n=1, 2, 3, \dots$,

$$\log(a_0 + a_1) - \log a_0 < \frac{a_1}{a_0},$$

$$\log(a_0 + a_1 + a_2) - \log(a_0 + a_1) < \frac{a_2}{a_0 + a_1},$$

$$\log(a_0 + a_1 + a_2 + a_3) - \log(a_0 + a_1 + a_2) < \frac{a_3}{a_0 + a_1 + a_2},$$

.....

$$\log(a_0 + a_1 + \dots + a_n) - \log(a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}) < \frac{a_n}{a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}},$$

et en prenant la somme,

$$\log(a_0 + a_1 + \dots + a_n) - \log a_0 < \frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0 + a_1} + \dots + \frac{a_n}{a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}}.$$

Mais si la série $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ est divergente, sa somme est infinie, et le logarithme de cette somme l'est également; donc la somme

de la série $\frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0 + a_1} + \dots + \frac{a_n}{a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}} + \dots$ est aussi infiniment grande, et cette série est par conséquent divergente, si la série $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ l'est.

Cela posé, supposons que φn soit une fonction de n , telle que la série $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ soit convergente ou divergente selon que $\varphi n \cdot a_n$ est zéro ou non pour $n = \infty$. Alors la série

$$\frac{1}{\varphi(1)} + \frac{1}{\varphi(2)} + \frac{1}{\varphi(3)} + \frac{1}{\varphi(4)} + \dots + \frac{1}{\varphi n} + \dots$$

sera divergente, et la série

$$\frac{1}{\varphi(2) \cdot \frac{1}{\varphi(1)}} + \frac{1}{\varphi(3) \left(\frac{1}{\varphi(1)} + \frac{1}{\varphi(2)} \right)} + \frac{1}{\varphi(4) \left(\frac{1}{\varphi(1)} + \frac{1}{\varphi(2)} + \frac{1}{\varphi(3)} \right)} + \dots$$

$$+ \frac{1}{\varphi^n \left(\frac{1}{\varphi(1)} + \frac{1}{\varphi(2)} + \frac{1}{\varphi(3)} + \dots + \frac{1}{\varphi(n-1)} \right)} + \dots$$

convergente; car dans la première on a $a_n \varphi n = 1$ et dans la seconde $a_n \varphi n = 0$ pour $n = \infty$. Or, selon le théorème établi plus haut, la seconde série est nécessairement divergente en même temps que la première; donc une fonction φn telle qu'on l'a supposée n'existe pas. En faisant $\varphi n = n$, les deux séries en question deviendront

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

et

$$\frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3(1 + \frac{1}{2})} + \frac{1}{4(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})} + \dots + \frac{1}{n(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1})} + \dots,$$

qui par conséquent sont divergentes toutes deux.