X.

DÉMONSTRATION D'UNE EXPRESSION DE LAQUELLE LA FORMULE BINOME EST UN CAS PARTICULIER.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 1, Berlin 1826.

Cette expression est la suivante:

$$\begin{aligned}(x+\alpha)^n = x^n + \frac{n}{1}\alpha(x+\beta)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{n-2} + \cdots \\ + \frac{n(n-1)\ldots(n-\mu+1)}{1.2\ldots\mu}\alpha(\alpha-\mu\beta)^{\mu-1}(x+\mu\beta)^{n-\mu} + \cdots \\ + \frac{n}{1}\alpha(\alpha-(n-1)\beta)^{n-2}(x+(n-1)\beta) + \alpha(\alpha-n\beta)^{n-1};\end{aligned}$$

x, α et β sont des quantités quelconques, n est un nombre entier positif.

Lorsque $n=0$, l'expression donne

$$(x+\alpha)^0 = x^0,$$

qu'il fallait. Or on peut, comme il suit, démontrer que si l'expression subsiste pour $n=m$, elle doit aussi subsister pour $n=m+1$, c'est-à-dire qu'elle est vraie en général.

Soit

$$\begin{aligned}(x+\alpha)^m = x^m + \frac{m}{1}\alpha(x+\beta)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{m-2} + \cdots \\ + \frac{m}{1}\alpha(\alpha-(m-1)\beta)^{m-2}(x+(m-1)\beta) + \alpha(\alpha-m\beta)^{m-1}.\end{aligned}$$

En multipliant par $(m+1)dx$ et intégrant, on trouve

$$(x+\alpha)^{m+1}=x^{m+1}+\frac{m+1}{1}\alpha(x+\beta)^m+\frac{(m+1)m}{1.2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{m-1}+\cdots$$
$$+\frac{m+1}{1}\alpha(\alpha-m\beta)^{m-1}(x+m\beta)+C,$$

C étant la constante arbitraire. Pour trouver sa valeur posons $x=-(m+1)\beta$, les deux dernières équations donneront

$$(\alpha-(m+1)\beta)^m=(-1)^m\Big[(m+1)^m\beta^m-m^m\alpha\beta^{m-1}$$
$$+\frac{m}{2}(m-1)^{m-1}\alpha(\alpha-2\beta)\beta^{m-2}-\frac{m(m-1)}{2.3}(m-2)^{m-2}\alpha(\alpha-3\beta)^2\beta^{m-3}+\cdots\Big],$$
$$(\alpha-(m+1)\beta)^{m+1}=(-1)^{m+1}\Big[(m+1)^{m+1}\beta^{m+1}-(m+1)m^m\alpha\beta^m$$
$$+\frac{(m+1)m}{2}(m-1)^{m-1}\alpha(\alpha-2\beta)\beta^{m-1}-\cdots\Big]+C.$$

Multipliant la première de ces équations par $(m+1)\beta$ et ajoutant le produit à la seconde, on trouve

$$C=(\alpha-(m+1)\beta)^{m+1}+(m+1)\beta(\alpha-(m+1)\beta)^m,$$

ou bien

$$C=\alpha(\alpha-(m+1)\beta)^m.$$

Il s'ensuit que l'équation proposée subsiste de même pour $n=m+1$. Or elle a lieu pour $n=0$; donc elle aura lieu pour $n=0, 1, 2, 3$ etc. c'est-à-dire pour toute valeur entière et positive de n.

Si l'on fait $\beta=0$, on obtient la formule binome. Si l'on fait $\alpha=-x$, on trouve

$$0=x^n-\frac{n}{1}x(x+\beta)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}x(x+2\beta)^{n-1}$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x(x+3\beta)^{n-1}+\cdots$$

ou en divisant par x,

$$0=x^{n-1}-\frac{n}{1}(x+\beta)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}(x+2\beta)^{n-1}$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(x+3\beta)^{n-1}+\cdots$$

ce qui est d'ailleurs connu; car le second membre de cette équation n'est autre chose que

$$(-1)^n\Delta^n(x^{n-1}),$$

en faisant la différence constante égale à β.
