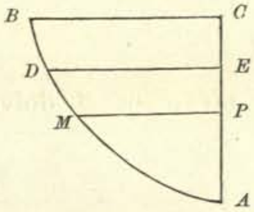
IX.

RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE MECANIQUE.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. I, Berlin 1826.



Soit $BDMA$ une courbe quelconque. Soit BC une droite horizontale et CA une droite verticale. Supposons qu'un point sollicité par la pesanteur se meuve sur la courbe, un point quelconque D étant son point de départ. Soit τ le temps qui s'est écoulé quand le mobile est parvenu à un point donné A, et soit a la hauteur EA. La quantité τ sera une certaine fonction de a, qui dépendra de la forme de la courbe. Réciproquement la forme de la courbe dépendra de cette fonction. Nous allons examiner comment, à l'aide d'une intégrale définie, on peut trouver l'équation de la courbe pour laquelle τ est une fonction continue donnée de a.

Soit $AM = s$, $AP = x$, et soit t le temps que le mobile emploie à parcourir l'arc DM. D'après les règles de la mécanique on a $-\frac{ds}{dt} = \sqrt{a-x}$, donc $dt = -\frac{ds}{\sqrt{a-x}}$. Il s'ensuit, lorsqu'on prend l'intégrale depuis $x = a$ jusqu'à $x = 0$,

$$\tau = -\int_a^0 \frac{ds}{\sqrt{a-x}} = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}},$$

$\int_\alpha^\beta$ désignant que les limites de l'intégrale sont $x = \alpha$ et $x = \beta$. Soit maintenant

$$\tau = \varphi a$$

la fonction donnée, on aura

$$\varphi a = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}},$$

équation de laquelle on doit tirer s en fonction de x. Au lieu de cette équation, nous allons considérer cette autre plus générale

$$\varphi a = \int_0^a \frac{ds}{(a-x)^n},$$

de laquelle nous chercherons à déduire l'expression de s en x.

Désignons par $\Gamma\alpha$ la fonction

$$\Gamma\alpha = \int_0^1 dx \left(\log\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1},$$

on a comme on sait

$$\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}dy = \frac{\Gamma\alpha.\Gamma\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

où α et β doivent être supérieurs à zéro. Soit $\beta = 1-n$, on trouvera

$$\int_0^1 \frac{y^{\alpha-1}dy}{(1-y)^n} = \frac{\Gamma\alpha.\Gamma(1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)},$$

d'où l'on tire, en faisant $z = ay$,

$$\int_0^a \frac{z^{\alpha-1}dz}{(a-z)^n} = \frac{\Gamma\alpha.\Gamma(1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)} a^{\alpha-n}.$$

En multipliant par $\dfrac{da}{(x-a)^{1-n}}$ et prenant l'intégrale depuis $a=0$ jusqu'à $a=x$, on trouve

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{z^{\alpha-1}dz}{(a-z)^n} = \frac{\Gamma\alpha.\Gamma(1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)} \int_0^x \frac{a^{\alpha-n}da}{(x-a)^{1-n}}.$$

En faisant $a = xy$, on aura

$$\int_0^x \frac{a^{\alpha-n}da}{(x-a)^{1-n}} = x^\alpha \int_0^1 \frac{y^{\alpha-n}dy}{(1-y)^{1-n}} = x^\alpha \frac{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma n}{\Gamma(\alpha+1)},$$

donc

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{z^{\alpha-1}dz}{(a-z)^n} = \Gamma n.\Gamma(1-n)\frac{\Gamma\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha.$$

Or d'après une propriété connue de la fonction Γ, on a

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\,\Gamma\alpha;$$

on aura donc en substituant:

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}}\int_0^a \frac{z^{\alpha-1}\,dz}{(a-z)^n}=\frac{x^\alpha}{\alpha}\,\Gamma n\,.\,\Gamma(1-n).$$

En multipliant par $\alpha\varphi\alpha\,.\,d\alpha$, et intégrant par rapport à α, on trouve

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}}\int_0^a \frac{(\int\varphi\alpha\,.\,\alpha z^{\alpha-1}\,d\alpha)dz}{(a-z)^n}=\Gamma n\,.\,\Gamma(1-n)\int\varphi\alpha\,.\,x^\alpha\,d\alpha.$$

Soit

$$\int\varphi\alpha\,.\,x^\alpha d\alpha=fx,$$

on en tire en différentiant,

$$\int\varphi\alpha\,.\,\alpha x^{\alpha-1}d\alpha=f'x,$$

donc

$$\int\varphi\alpha\,.\,\alpha z^{\alpha-1}d\alpha=f'z;$$

par conséquent

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}}\int_0^a \frac{f'z\,.\,dz}{(a-z)^n}=\Gamma n\,.\,\Gamma(1-n)fx,$$

ou, puisque $\Gamma n\,.\,\Gamma(1-n)=\frac{\pi}{\sin n\pi}$,

(1) $$fx=\frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}}\int_0^a \frac{f'z\,.\,dz}{(a-z)^n}.$$

A l'aide de cette équation, il sera facile de tirer la valeur de s de l'équation

$$\varphi a=\int_0^a \frac{ds}{(a-x)^n}.$$

Qu'on multiplie cette équation par $\frac{\sin n\pi}{\pi}\,\frac{da}{(x-a)^{1-n}}$, et qu'on prenne l'intégrale depuis $a=0$ jusqu'à $a=x$, on aura

$$\frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^x \frac{\varphi a\,.\,da}{(x-a)^{1-n}}=\frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}}\int_0^a \frac{ds}{(a-x)^n},$$

donc en vertu de l'équation (1)

$$s = \frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^x \frac{\varphi a \,.\, da}{(x-a)^{1-n}}.$$

Soit maintenant $n = \frac{1}{2}$, on obtient

$$\varphi a = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}}$$

et

$$s = \frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{\varphi a \,.\, da}{\sqrt{x-a}}.$$

Cette équation donne l'arc s par l'abscisse x, et par suite la courbe est entièrement déterminée.

Nous allons appliquer l'expression trouvée à quelques exemples.

I. Soit

$$\varphi a = \alpha_0 a^{\mu_0} + \alpha_1 a^{\mu_1} + \cdots + \alpha_m a^{\mu_m} = \Sigma \alpha a^{\mu},$$

la valeur de s sera

$$s = \frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{da}{\sqrt{x-a}}\Sigma \alpha a^{\mu} = \frac{1}{\pi}\Sigma\left(\alpha\int_0^x \frac{a^{\mu} da}{\sqrt{x-a}}\right).$$

Si l'on fait $a = xy$, on aura

$$\int_0^x \frac{a^{\mu} da}{\sqrt{x-a}} = x^{\mu+\frac{1}{2}}\int_0^1 \frac{y^{\mu} dy}{\sqrt{1-y}} = x^{\mu+\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu+\frac{3}{2})},$$

donc

$$s = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\pi}\Sigma\frac{\alpha\,\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\frac{3}{2})}x^{\mu+\frac{1}{2}},$$

ou, puisque $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$,

$$s = \sqrt{\frac{x}{\pi}}\left[\alpha_0\frac{\Gamma(\mu_0+1)}{\Gamma(\mu_0+\frac{3}{2})}x^{\mu_0} + \alpha_1\frac{\Gamma(\mu_1+1)}{\Gamma(\mu_1+\frac{3}{2})}x^{\mu_1} + \cdots + \alpha_m\frac{\Gamma(\mu_m+1)}{\Gamma(\mu_m+\frac{3}{2})}x^{\mu_m}\right].$$

Si l'on suppose p. ex. que $m=0$, $\mu_0 = 0$, c'est-à-dire que la courbe cherchée soit isochrone, on trouve

$$s = \sqrt{\frac{x}{\pi}}\,\alpha_0\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{\alpha_0}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}\sqrt{\frac{x}{\pi}} = \frac{2\alpha_0}{\pi}\sqrt{x},$$

or $s = \frac{2\alpha_0}{\pi}\sqrt{x}$ est l'équation connue de la cycloide.

II. Soit

φa depuis $a=0$ jusqu'à $a=a_0$, égal à $\varphi_0 a$

φa depuis $a=a_0$ jusqu'à $a=a_1$, égal à $\varphi_1 a$

φa depuis $a=a_1$ jusqu'à $a=a_2$, égal à $\varphi_2 a$

. . . .

φa depuis $a=a_{m-1}$ jusqu'à $a=a_m$, égal à $\varphi_m a$,

on aura

$$\pi s=\int_0^x \frac{\varphi_0 a.da}{\sqrt{a-x}}, \text{ depuis } x=0 \text{ jusqu'à } x=a_0,$$

$$\pi s=\int_0^{a_0} \frac{\varphi_0 a.da}{\sqrt{a-x}}+\int_{a_0}^x \frac{\varphi_1 a.da}{\sqrt{a-x}}, \text{ depuis } x=a_0 \text{ jusqu'à } x=a_1,$$

$$\pi s=\int_0^{a_0} \frac{\varphi_0 a.da}{\sqrt{a-x}}+\int_{a_0}^{a_1} \frac{\varphi_1 a.da}{\sqrt{a-x}}+\int_{a_1}^x \frac{\varphi_2 a.da}{\sqrt{a-x}}, \text{ depuis } x=a_1 \text{ jusqu'à } x=a_2,$$

. . . .

$$\pi s=\int_0^{a_0} \frac{\varphi_0 a.da}{\sqrt{a-x}}+\int_{a_0}^{a_1} \frac{\varphi_1 a.da}{\sqrt{a-x}}+\cdots+\int_{a_{m-2}}^{a_{m-1}} \frac{\varphi_{m-1} a.da}{\sqrt{a-x}}+\int_{a_{m-1}}^x \frac{\varphi_m a.da}{\sqrt{a-x}},$$

$$\text{depuis } x=a_{m-1} \text{ jusqu'à } x=a_m,$$

où il faut remarquer que les fonctions $\varphi_0 a$, $\varphi_1 a$, $\varphi_2 a \ldots \varphi_m a$ doivent être telles que

$$\varphi_0 a_0=\varphi_1 a_0,\ \varphi_1 a_1=\varphi_2 a_1,\ \varphi_2 a_2=\varphi_3 a_2, \text{ etc.},$$

car la fonction φa doit nécessairement être continue.
