

#### IV.

### L'INTÉGRALE FINIE $\Sigma^n \varphi x$ EXPRIMÉE PAR UNE INTÉGRALE DÉFINIE SIMPLE.

Magazin for Naturvidenskaberne, Aargang III, Bind 2, Christiania 1825.

On peut comme on sait, au moyen du théorème de *Parseval* exprimer l'intégrale finie  $\Sigma^n \varphi x$  par une intégrale définie double, mais si je ne me trompe, on n'a pas exprimé la même intégrale par une intégrale définie simple. C'est ce qui est l'objet de ce mémoire.

En désignant par  $\varphi x$  une fonction quelconque de  $x$ , il est aisé de voir qu'on peut toujours supposer

$$(1) \quad \varphi x = \int e^{vx} f v \cdot dv,$$

l'intégrale étant prise entre deux limites quelconques de  $v$ , indépendantes de  $x$ . La fonction  $f v$  désigne une fonction de  $v$ , dont la forme dépend de celle de  $\varphi x$ . En supposant  $Ax=1$ , on aura en prenant l'intégrale finie des deux membres de l'équation (1)

$$(2) \quad \Sigma \varphi x = \int e^{vx} \frac{f v}{e^v - 1} dv,$$

où il faut ajouter une constante arbitraire. En prenant une seconde fois l'intégrale finie, on obtiendra

$$\Sigma^2 \varphi x = \int e^{vx} \frac{f v}{(e^v - 1)^2} dv.$$

En général on trouvera

$$(3) \quad \Sigma^n \varphi x = \int e^{vx} \frac{f v}{(e^v - 1)^n} dv.$$

Pour compléter cette intégrale il faut ajouter au second membre une fonction de la forme

$$C + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_{n-1} x^{n-1},$$

$C, C_1, C_2$  etc. étant des constantes arbitraires.

Il s'agit maintenant de trouver la valeur de l'intégrale définie  $\int e^{vx} \frac{fv}{(e^v-1)^n} dv$ . Pour cela je me sers d'un théorème dû à M. Legendre (Exerc. de calc. int. t. II, p. 189), savoir que

$$\frac{1}{4} \frac{e^v + 1}{e^v - 1} - \frac{1}{2v} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt \cdot \sin vt}{e^{2\pi t} - 1}.$$

On tire de cette équation

$$(4) \quad \frac{1}{e^v - 1} = \frac{1}{v} - \frac{1}{2} + 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt \cdot \sin vt}{e^{2\pi t} - 1}.$$

En substituant cette valeur de  $\frac{1}{e^v - 1}$  dans l'équation (2), on aura

$$\Sigma \varphi x = \int e^{vx} \frac{fv}{v} dv - \frac{1}{2} \int e^{vx} fv \cdot dv + 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \int e^{vx} fv \cdot \sin vt \cdot dv.$$

L'intégrale  $\int e^{vx} fv \cdot \sin vt \cdot dv$  se trouve de la manière suivante. En remplaçant dans l'équation (1)  $x$  successivement par  $x + t\sqrt{-1}$  et  $x - t\sqrt{-1}$ , on obtiendra

$$\begin{aligned} \varphi(x + t\sqrt{-1}) &= \int e^{vx} e^{vt\sqrt{-1}} fv \cdot dv, \\ \varphi(x - t\sqrt{-1}) &= \int e^{vx} e^{-vt\sqrt{-1}} fv \cdot dv, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en retranchant et divisant par  $2\sqrt{-1}$ ,

$$\int e^{vx} \sin vt \cdot fv \cdot dv = \frac{\varphi(x + t\sqrt{-1}) - \varphi(x - t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

Ainsi l'expression de  $\Sigma \varphi x$  devient

$$\Sigma \varphi x = \int \varphi x \cdot dx - \frac{1}{2} \varphi x + 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \frac{\varphi(x + t\sqrt{-1}) - \varphi(x - t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

Maintenant pour trouver la valeur de l'intégrale générale

$$\Sigma^n \varphi x = \int e^{vx} fv \frac{dv}{(e^v - 1)^n},$$

posons

$$\frac{1}{(e^v - 1)^n} = (-1)^{n-1} \left( A_{0,n} p + A_{1,n} \frac{dp}{dv} + A_{2,n} \frac{d^2 p}{dv^2} + \dots + A_{n-1,n} \frac{d^{n-1} p}{dv^{n-1}} \right)$$

où  $p$  est égal à  $\frac{1}{e^v - 1}$ ,  $A_{0,n}$ ,  $A_{1,n}$ ... étant des coefficients numériques qui doivent être déterminés. Si l'on différentie l'équation précédente, on a

$$\frac{ne^v}{(e^v - 1)^{n+1}} = (-1)^n \left( A_{0,n} \frac{dp}{dv} + A_{1,n} \frac{d^2 p}{dv^2} + \dots + A_{n-1,n} \frac{d^n p}{dv^n} \right).$$

Or

$$\frac{ne^v}{(e^v - 1)^{n+1}} = \frac{n}{(e^v - 1)^n} + \frac{n}{(e^v - 1)^{n+1}},$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{ne^v}{(e^v - 1)^{n+1}} &= n(-1)^{n-1} \left( A_{0,n} p + A_{1,n} \frac{dp}{dv} + \dots + A_{n-1,n} \frac{d^{n-1} p}{dv^{n-1}} \right) \\ &+ n(-1)^n \left( A_{0,n+1} p + A_{1,n+1} \frac{dp}{dv} + \dots + A_{n,n+1} \frac{d^n p}{dv^n} \right). \end{aligned}$$

En comparant ces deux expressions de  $\frac{ne^v}{(e^v - 1)^{n+1}}$ , on en déduit les équations suivantes:

$$\begin{aligned} A_{0,n+1} - A_{0,n} &= 0 & \text{ou: } \Delta A_{0,n} &= 0, \\ A_{1,n+1} - A_{1,n} &= \frac{1}{n} A_{0,n} & \text{ou: } \Delta A_{1,n} &= \frac{1}{n} A_{0,n}, \\ A_{2,n+1} - A_{2,n} &= \frac{1}{n} A_{1,n} & \text{ou: } \Delta A_{2,n} &= \frac{1}{n} A_{1,n}, \\ &\dots & & \dots \\ A_{n-1,n+1} - A_{n-1,n} &= \frac{1}{n} A_{n-2,n} & \text{ou: } \Delta A_{n-1,n} &= \frac{1}{n} A_{n-2,n}, \\ A_{n,n+1} &= \frac{1}{n} A_{n-1,n}, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} A_{0,n} &= 1, \quad A_{1,n} = \Sigma \frac{1}{n}, \quad A_{2,n} = \Sigma \left( \frac{1}{n} \Sigma \frac{1}{n} \right), \quad A_{3,n} = \Sigma \left[ \frac{1}{n} \Sigma \left( \frac{1}{n} \Sigma \frac{1}{n} \right) \right] \text{ etc.} \\ A_{n,n+1} &= \frac{1}{n} \frac{1}{n-1} \frac{1}{n-2} \dots \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \cdot A_{0,1} = \frac{1}{\Gamma(n+1)}. \end{aligned}$$

Cette dernière équation servira à déterminer les constantes qui rentrent dans les expressions de  $A_{1,n}$ ,  $A_{2,n}$ ,  $A_{3,n}$  etc.

Ayant ainsi déterminé les coefficients  $A_{0,n}$ ,  $A_{1,n}$ ,  $A_{2,n}$  etc., on aura, en substituant dans l'équation (3) au lieu de  $\frac{1}{(e^v - 1)^n}$  sa valeur,

$$\Sigma^n \varphi x = (-1)^{n-1} \int e^{vx} f v \cdot dv \left( A_{0,n} p + A_{1,n} \frac{dp}{dv} + \dots + A_{n-1,n} \frac{d^{n-1} p}{dv^{n-1}} \right);$$

maintenant on a

$$p = \frac{1}{v} - \frac{1}{2} + 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt \cdot \sin vt}{e^{2\pi t} - 1},$$

d'où l'on tire en différentiant

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{1}{v^2} + 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t dt \cdot \cos vt}{e^{2\pi t} - 1},$$

$$\frac{d^2 p}{dv^2} = \frac{2}{v^3} - 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^2 dt \cdot \sin vt}{e^{2\pi t} - 1},$$

$$\frac{d^3 p}{dv^3} = -\frac{2 \cdot 3}{v^4} - 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^3 dt \cdot \cos vt}{e^{2\pi t} - 1} \text{ etc.};$$

done en substituant

$$\begin{aligned} \Sigma^n \varphi x &= \int \left( A_{n-1,n} \frac{\Gamma n}{v^n} - A_{n-2,n} \frac{\Gamma(n-1)}{v^{n-1}} + \dots + (-1)^{n-1} A_{0,n} \frac{1}{v} + (-1)^n \cdot \frac{1}{2} \right) e^{vx} f v \cdot dv \\ &+ 2(-1)^{n-1} \iint_0^{\frac{1}{2}} \frac{P \sin vt \cdot dt}{e^{2\pi t} - 1} e^{vx} f v \cdot dv + 2(-1)^{n-1} \iint_0^{\frac{1}{2}} \frac{Q \cos vt \cdot dt}{e^{2\pi t} - 1} e^{vx} f v \cdot dv. \end{aligned}$$

De l'équation  $\varphi x = \int e^{vx} f v \cdot dv$  on tire en intégrant:

$$\int \varphi x \cdot dx = \int e^{vx} f v \frac{dv}{v},$$

$$\int^2 \varphi x \cdot dx^2 = \int e^{vx} f v \frac{dv}{v^2},$$

$$\int^3 \varphi x \cdot dx^3 = \int e^{vx} f v \frac{dv}{v^3} \text{ etc.};$$

de plus on a

$$\int \sin vt \cdot e^{vx} f v \cdot dv = \frac{\varphi(x + t\sqrt{-1}) - \varphi(x - t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}},$$

$$\int \cos vt \cdot e^{vx} f v \cdot dv = \frac{\varphi(x + t\sqrt{-1}) + \varphi(x - t\sqrt{-1})}{2},$$

done on aura en substituant

$$\begin{aligned} \Sigma^n \varphi x &= A_{n-1,n} \Gamma n \int^n \varphi x \cdot dx^n - A_{n-2,n} \Gamma(n-1) \int^{n-1} \varphi x \cdot dx^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} \int \varphi x \cdot dx \\ &+ (-1)^n \cdot \frac{1}{2} \varphi x + 2(-1)^{n-1} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{P dt}{e^{2\pi t} - 1} \frac{\varphi(x + t\sqrt{-1}) - \varphi(x - t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} \\ &+ 2(-1)^{n-1} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{Q dt}{e^{2\pi t} - 1} \frac{\varphi(x + t\sqrt{-1}) + \varphi(x - t\sqrt{-1})}{2} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} P &= A_{0,n} - A_{2,n} t^2 + A_{4,n} t^4 - \dots, \\ Q &= A_{1,n} t - A_{3,n} t^3 + A_{5,n} t^5 - \dots \end{aligned}$$

En faisant p. ex.  $n=2$ , on aura

$$\begin{aligned} \Sigma^2 \varphi x = & \iint \varphi x . dx^2 - \int \varphi x . dx + \frac{1}{2} \varphi x - 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) - \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} \\ & - 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t dt}{e^{2\pi t} - 1} \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) + \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2}. \end{aligned}$$

Soit p. ex.  $\varphi x = e^{ax}$ , on aura

$$\varphi(x \pm t\sqrt{-1}) = e^{ax} e^{\pm at\sqrt{-1}}, \quad \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}, \quad \iint e^{ax} dx^2 = \frac{1}{a^2} e^{ax},$$

donc, en substituant et divisant par  $e^{ax}$ ,

$$\frac{1}{(e^a - 1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt \cdot \sin at}{e^{2\pi t} - 1} - 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t dt \cdot \cos at}{e^{2\pi t} - 1}.$$

Le cas le plus remarquable est celui où  $n=1$ . On a alors, comme on l'a vu précédemment:

$$\Sigma \varphi x = C + \int \varphi x . dx - \frac{1}{2} \varphi x + 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) - \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

En supposant que les deux intégrales  $\Sigma \varphi x$  et  $\int \varphi x dx$  s'annulent pour  $x=a$ , il est clair qu'on aura:

$$C = \frac{1}{2} \varphi a - 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \frac{\varphi(a+t\sqrt{-1}) - \varphi(a-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}};$$

donc

$$\begin{aligned} \Sigma \varphi x = & \int \varphi x . dx - \frac{1}{2} (\varphi x - \varphi a) + 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) - \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} \\ & - 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \frac{\varphi(a+t\sqrt{-1}) - \varphi(a-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}. \end{aligned}$$

Si l'on fait  $x=\infty$ , en supposant que  $\varphi x$  et  $\int \varphi x . dx$  s'annulent pour cette valeur de  $x$ , on aura:

$$\begin{aligned} & \varphi a + \varphi(a+1) + \varphi(a+2) + \varphi(a+3) + \dots \text{in inf.} \\ = & \int_a^{\frac{1}{2}} \varphi x . dx + \frac{1}{2} \varphi a - 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \frac{\varphi(a+t\sqrt{-1}) - \varphi(a-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}. \end{aligned}$$

Soit p. ex.  $\varphi x = \frac{1}{x^2}$ , on aura

$$\frac{\varphi(a+t\sqrt{-1}) - \varphi(a-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} = \frac{-2at}{(a^2+t^2)^2},$$

donc

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+2)^2} + \dots = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a} + 4a \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t dt}{(e^{2\pi t} - 1)(a^2 + t^2)^2},$$

et en faisant  $a=1$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{6} = \frac{3}{2} + 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t dt}{(e^{2\pi t} - 1)(1+t^2)^2}.$$