

XX.

Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendantes.

Théorème. Soit y une fonction de x qui satisfait à une équation quelconque irréductible de la forme :

$$1) \quad 0 = p_0 + p_1 \cdot y + p_2 \cdot y^2 + \dots + p_{n-1} \cdot y^{n-1} + y^n$$

où $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ sont des fonctions entières de la variable x . Soit

$$2) \quad 0 = q_0 + q_1 \cdot y + q_2 \cdot y^2 + \dots + q_{n-1} \cdot y^{n-1},$$

une équation semblable, $q_0, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$ étant également des fonctions entières de x , et supposons variables les coefficients des diverses puissances de x dans ces fonctions. Nous désignerons ces coefficients par a, a', a'', \dots . En vertu des deux équations (1) et (2) x sera fonction de a, a', a'', \dots et on en déterminera les valeurs en éliminant la quantité y . Désignons par :

$$3) \quad \rho = 0$$

le résultat de l'élimination, en sorte que ρ ne contiendra que les variables x, a, a', a'', \dots . Soit μ le degré de cette équation par rapport à x , et désignons par

$$4) \quad x_1, x_2, x_3, \dots, x_\mu$$

ses μ racines, qui seront autant de fonctions de a, a', a'', \dots . Cela posé, si l'on fait

$$5) \quad \psi x = \int f(x, y) \cdot dx$$

où $f(x, y)$ désigne une fonction *rationnelle* quelconque de x et de y , je dis, que la fonction transcendante ψx jouira de la propriété générale exprimée par l'équation suivante :

$$6) \quad \psi x_1 + \psi x_2 + \dots + \psi x_\mu = u + k_1 \log v_1 + k_2 \log v_2 + \dots + k_n \log v_n,$$

u, v_1, v_2, \dots, v_n étant des fonctions rationnelles de a, a', a'', \dots , et k_1, k_2, \dots, k_n des constantes.

Démonstration. Pour prouver ce théorème il suffit d'exprimer la différentielle du premier membre de l'équation (6) en fonction de a, a', a'', \dots ; car

il se réduira par là à une différentielle rationnelle, comme on le verra. D'abord les deux équations (1) et (2) donneront y en fonction rationnelle de x, a, a', a'', \dots . De même l'équation (3): $\varrho = 0$ donnera pour dx une expression de la forme

$$dx = \alpha \cdot da + \alpha' \cdot da' + \alpha'' \cdot da'' + \dots,$$

où $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ sont des fonctions rationnelles de x, a, a', a'', \dots . De là il suit que la différentielle $f(x, y) \cdot dx$ pourra être mise sous la forme;

$$f(x, y)dx = \varphi x \cdot da + \varphi_1 x \cdot da' + \varphi_2 x \cdot da'' + \dots,$$

où $\varphi x, \varphi_1 x, \dots$ sont des fonctions rationnelles de x, a, a', a'', \dots . En intégrant, il viendra:

$$\psi x = \int (\varphi x \cdot da + \varphi_1 x \cdot da' + \dots)$$

et de là on tire, en remarquant que cette équation aura lieu en mettant pour x les μ valeurs de cette quantité:

$$7) \quad \psi x_1 + \psi x_2 + \dots + \psi x_\mu$$

$$= \int ((\varphi x_1 + \varphi x_2 + \dots + \varphi x_\mu) da + (\varphi_1 x_1 + \varphi_1 x_2 + \dots + \varphi_1 x_\mu) da' + \dots).$$

Dans cette équation les coefficients des différentielles da, da', \dots sont des fonctions rationnelles de a, a', a'', \dots et de x_1, x_2, \dots, x_μ , mais d'ailleurs ils sont symétriques par rapport à x_1, x_2, \dots, x_μ ; donc, en vertu d'un théorème connu, on pourra exprimer ces fonctions rationnellement par a, a', a'', \dots et par les coefficients de l'équation $\varrho = 0$; mais ceux-ci sont eux-mêmes des fonctions rationnelles des variables a, a', a'', \dots , donc enfin les coefficients de da, da', da'', \dots de l'équation (7) le seront également. Donc, en intégrant, on aura une équation de la forme (6).

Je me propose de développer dans une autre occasion de nombreuses applications de ce théorème, qui jetteront un grand jour sur la nature des fonctions transcendentes dont il s'agit.

Christiania le 6. Janvier 1829.

